È noto che nel secolo XIX la geometria che viene chiamata "pura", o anche "di metodo sintetico", ebbe uno sviluppo notevole. Questo fenomeno ci si presenta oggi come una specie di reazione al successo ed alla diffusione dei metodi della geometria analitica, che debbono la loro origine - come è noto - alla ricerca di R. Descartes e P. Fermat. A distanza di qualche secolo, appare abbastanza naturale il fatto che lo sviluppo dell'algebra, avvenuto come è noto nel secolo XVI per opera degli algebristi italiani, abbia condotto questa scienza a porsi come metodo di tutta la matematica; appare quindi anche naturale che, con le convenzioni introdotte da Cartesio e Fermat, anche i contenuti della geometria (teoremi e problemi da risolvere) cadessero sotto i metodi dell'algebra. È da osservare tuttavia che l'adozione delle convenzioni e dei metodi della geometria analitica presenta spesso un aspetto che non è completamente soddisfacente, almeno sotto certi aspetti e per certe mentalità di matematici.

Vorremmo esprimere il nostro pensiero con le parole di un geometra di un certo nome - Giuseppe Veronese - il quale nella sua opera fondamentale, intitolata "Fondamenti di geometria a più dimensioni, e a più specie di unità rettilinee" (Padova, 1891), (*) così si esprime (Op. Cit. Introduzione - Pag. XXI):

"*Il problema scientifico ed il problema didattico sono distinti*....";

ed a proposito dei metodi della geometria analitica che egli chiama brevemente "metodo analitico" contrapponendoli al metodo classico, che chiama "metodo puro", così si esprime:

"....*esaminando la questione* (della trattazione di un problema geometrico - nota nostra) *sotto il suo vero aspetto, il metodo puro è quello che deve essere preferito, perché il difetto del metodo analitico, e da tutti riconosciuto, è appunto quello che esso ci conduce molto sovente dalle premesse al risultato finale senza farci conoscere i diversi anelli della catena delle proprietà geometriche occorrenti nel passaggio dalla prima proprietà all'ultima, per quanto semplice ed elegante possa essere la dimostrazione; mentre nei principi fa d'uopo soprattutto rendersi ben conto di ogni particolare, cercando di avere un'immagine geometrica ben chiara del modo con cui essa deriva dalle precedenti.*

Un altro difetto è quello che talvolta esso richiede un grande apparato di simboli e di calcoli per giungere a proprietà geometriche semplicissime. Newton stesso osservò che aritmeticamente è più semplice ciò che viene determinato da equazioni semplici; geometricamente invece più semplice ciò che si ottiene mediante semplice tracciamento di linee; e nella geometria deve essere prima e preferibile ciò che è più semplice secondo il concetto geometrico. Dimodoché noi non adottiamo il metodo analitico solo perché con esso si segue il cammino inverso del metodo storico col quale si è svolta la geometria, né seguiamo questo metodo perché corrisponde allo spirito della geometria greca, ma perché il metodo greco corrisponde meglio *alla natura del problema*".

E lo stesso Veronese ritorna sull'argomento nell'Appendice all'opera citata, appendice intitolata: "Studio storico e critico dei principi della Geometria", dicendo, a proposito della didattica e dei suoi problemi:

"*Per le ragioni dette nella prefazione* (quelle che abbiamo qui riportate) *siamo però in ogni caso contrari nell'insegnamento degli elementi a qualsiasi formalismo o meccanismo che sostituisca sistematicamente o possa menomare, se non annienta una delle più belle facoltà dello spirito, l'intuizione spaziale, il cui aiuto nello studio scientifico degli elementi va inteso nel senso da noi spiegato*" (Op. cit. Pag. 604).

Pensiamo che queste pagine di Veronese rendano abbastanza bene la situazione della geometria, come era vista verso la fine dell' '800, quasi alla fine di un movimento di rivalutazione di questa branca della matematica e dei suoi metodi; movimento che aveva trovato i suoi rappresentanti più importanti negli inventori della geometria proiettiva (Poncelet e K. K. von Staudt) e nei grandi geometri 'puri' come J. Steiner. Analizzeremo in seguito a parte il significato didattico delle idee che stanno alla base della geometria 'pura'; ci limitiamo ad osservare qui che questa rinascita appare abbastanza scontata quando si osservi che la applicazione dei metodi della geometria analitica richiede l'intervento di certe convenzioni che rendono necessaria la presenza di un sistema di riferimento. Quest'ultimo appare in certo modo estraneo al problema geometrico che di volta in volta viene trattato; anzi, si potrebbe dire, la garanzia del fatto che il problema geometrico viene risolto in modo giusto può anche dipendere dal fatto che il riferimento sia del tutto estraneo al problema stesso e che quindi i risultati conseguiti siano soltanto relativi al problema e non alla scelta del riferimento, che è e deve rimanere arbitraria ed estranea. Come è noto – una volta che il problema è stato tradotto in un problema geometrico analitico – il risultato viene ottenuto con l'applicazione delle regole dell'algebra o dell'analisi matematica; regole che possono seguire dei cammini del tutto diversi da quelli che vengono seguiti nella soluzione geometrica 'pura' dei problemi considerati. Pertanto il controllo della validità dei risultati è interamente demandato al controllo formale della corretta applicazione delle regole sintattiche degli strumenti analitici adottati; e ciò può essere comodo e rigoroso, da un certo punto di vista, ma può anche essere fuorviante, se non si controlla ad ogni passaggio formale il significato concreto delle espressioni che si scrivono. Abitualmente, nella pratica didattica, questo controllo viene chiamato 'discussione' dei problemi; questa fase della risoluzione potrebbe costituire il momento veramente importante di questa procedura; invece spesso essa viene resa meccanica e priva di senso con l'apprendimento mnemonico di certe regole di comportamento che non vengono abitualmente comprese nella loro essenza e nella loro portata.

Questo problema che viene risolto sul piano didattico in vari modi, non sempre uniformi e coerenti, ha dato luogo nel corso del secolo XIX a vari tentativi di soluzione, che rientrano nel movimento di ricupero della geometria 'pura' di cui abbiamo parlato. Ne ricorderemo qui due, che ci sembrano importanti per lo spirito che li informa. Il primo si deve sostanzialmente all'opera di K. K. von Staudt, il quale, prima con la sua opera "Geometrie der Lage" (Geometria di posizione) del 1817 diede i fondamenti della geometria proiettiva, in senso puramente sintetico, e poi con l'opera

"Beiträge zur Geometrie der Lage" (Complementi alla geometria di posizione) del 1856 diede una trattazione diretta della geometria proiettiva mediante la costruzione di un 'calcolo delle quaterne', costruendo direttamente, mediante costruzioni e considerazioni geometriche, le coordinate proiettive nel piano e nello spazio.

È noto che l'opera di Staudt presenta delle lacune, soprattutto nella dimostrazione di quello che viene abitualmente chiamato il teorema fondamentale della proiettività; per la dimostrazione di questo occorre far ricorso in modo esplicito e rigoroso alla continuità della retta, come è stato fatto da geometri posteriori, per esempio F. Enriques nelle sue "Lezioni di Geometria proiettiva"; ma queste lacune non tolgono la validità e la eleganza coerente della trattazione di Staudt, e soprattutto non appannano la luminosità della sua idea di costruire direttamente le coordinate dei punti e degli elementi della geometria senza far ricorso agli assi di riferimento. A questo proposito occorre anche ricordare che già nel 1827 Gergonne aveva enunciato il suo principio di dualità, e nel 1829 Plücker aveva avuto l'idea di cambiare quello che era chiamato l'elemento fondamentale della geometria, cioè di considerare le rette ed i piani come elementi generatori delle figure geometriche, le quali, prima di allora, erano state immaginate esclusivamente generate dai punti dello spazio.

Un secondo tentativo di costruire direttamente un 'calcolo' sulle figure geometriche si ebbe nel 1844 con lo "Ausdehnungslehre" di H. Grassmann; opera che è bensì anteriore quella di Staudt, ma che - a detta dell'A., nella prefazione alla IIª edizione del 1877 - fu ben poco conosciuta ed apprezzata, almeno nei primi anni dopo la sua pubblicazione. Si potrebbe dire che l'opera di Grassmann fu la radice da cui germinarono altri sistemi di calcolo diretto sugli enti della geometria, sistemi tra i quali potremmo annoverare il "Calcolo delle equipollenze " di Bellavitis e la teoria dei quaternioni di Hamilton, così come i vari sistemi di calcolo vettoriale, che adottarono varie convenzioni di notazione, come quella della scuola italiana e quella della scuola tedesca.


CALCOLO
GEOMETRICO
OPERAZIONI DELLA LOGICA DEDUTTIVA
GIUSEPPE PEANO
TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI

Il titolo dell'opera di G. Peano fa un preciso riferimento a quella di Grassmann, perché suona "Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva per Giuseppe Peano professore nella R. Accademia militare incaricato nella R. Università di Torino" (Torino - Fratelli Bocca Editori - 1888).
Nel suo lavoro Peano dice esplicitamente che vuole costruire un calcolo diretto sugli enti della geometria, senza far riferimento ad elementi estranei, come le coordinate cartesiane o non; tale discorso sarà ripetuto dai suoi seguaci, come Burali-Forti, che nei suoi trattati e nelle opere dedicate al calcolo vettoriale insisterà nella stessa posizione.

Si potrebbe osservare che nella stessa definizione che Peano dà delle forme geometriche di prima, seconda e terza specie intervengono degli elementi arbitrari; e pertanto quella scelta arbitraria di elementi estranei al problema che nel sistema classico di coordinate cartesiane viene fatta una tantum con lo stabilire il sistema di riferimento, non viene per nulla evitata nella procedura di Peano.

Sono anche da farsi altre osservazioni all'opera peaniana: la prima è che essa presuppone la conoscenza della geometria elementare, perché per la definizione delle forme geometriche fa esplicito riferimento al volume di un tetraedro (costruito appunto con l'ausilio di punti arbitrari), e ritiene note tutte le proprietà di geometria elementare relative al calcolo dei volumi.

La seconda è che non viene dimostrato che le relazioni che si definiscono e che si deducono dalle definizioni sono valide quale che sia la scelta degli elementi arbitrari e che - in più - non viene mai dimostrato quale sia il minimo numero di elementi arbitrari generici che occorrono per verificare la validità di certe relazioni.

In altre parole, l'opera di Peano non riguarda i fondamenti della geometria, ma semplicemente vuole essere un nuovo modo per presentare il calcolo diretto sugli enti della geometria senza introdurre l'armamentario delle coordinate. In questo l'opera di Peano costituisce un progresso notevole rispetto a quella di Grassmann, che mescola le idee originali con delle argomentazioni le quali a buona ragione possono essere giudicate oscure e contorte, come hanno fatto G. Veronese prima e C. Burali-Forti poi. Occorre dire che non ci si stupisce del fatto che la prima edizione dell'opera di Grassmann sia rimasta per lungo tempo poco conosciuta, come egli lamenta nella prefazione. A dire il vero, occorre un po' di fatica e di tenacia per scoprire le idee originali sotto l'armamentario di considerazioni quasi filosofiche sotto le quali esse sono nascoste; inoltre la posizione di Grassmann di fronte ai fondamenti della geometria non è per nulla soddisfacente, come giustamente giudica G. Veronese, rilevando le lacune e le petizioni di principio che vi sono nel tentativo di Grassmann di fondare la geometria. Tuttavia si potrebbe dire che l'idea fondamentale di Grassmann sia quella di costruire una convenzione di prodotto alterno, che ha per oggetto direttamente gli enti geometrici. Prodotto che nell'algebra moderna, soprattutto quella applicata alla geometria ed alla fisica matematica, si ritrova in varie forme. Pertanto in questo ordine di idee, la esposizione di Peano dell'opera di Grassmann risulta essere di una chiarezza molto maggiore di quella del tedesco; va osservato inoltre che Peano premette alla trattazione geometrica vera e propria 31 pagine in cui espone le regole del calcolo deduttivo, secondo le idee fondamentali della logica formale, della quale egli doveva manifestarsi in seguito uno dei maggiori cultori e difensori del suo tempo. Si tratta probabilmente di una delle prime pubblicazioni di Peano in cui questi utilizza tali simboli, perché le notazioni che usa sono diverse da quasi tutte quelle che egli inventerà nel seguito per costruire la sua logica formale. In questo ordine di idee si potrebbe anche dire che il tentativo di un calcolo diretto sugli enti della geometria è in continuità con l'opera di Peano nella costruzione della logica formale; anche questa infatti si potrebbe considerare come un tentativo per costruire un calcolo delle idee, che giunga a raffigurare direttamente queste senza l'intermediario del linguaggio comune e giunga a ridurre il procedimento della deduzione ad un calcolo con leggi opportune su simboli opportuni.

Il giudizio sulla efficacia e sul successo del tentativo di Peano nella direzione che abbiamo cercato di descrivere brevemente è molto difficile. Si tratta di giudicare un insieme di convenzioni, e non di idee o di teoremi; e ben si sa che le convenzioni vengono adottate in seguito a comportamenti che non sempre sono perfettamente razionali. A questo proposito ci pare classico l'esempio fornito dalle convenzioni che Peano preconizzò per scrivere le formule matematiche; convenzioni che in molti casi sono più ragionevoli, chiare e comode di quelle tradizionali, ma che soltanto recentemente sono state adottate ed hanno avuto una certa diffusione, probabilmente in seguito all'aumento dei costi della composizione tipografica.

Ci pare anche che il discorso sulle convenzioni di scrittura si colleghi con quello della efficacia didattica di una certa impostazione dello studio della geometria. Invero l'insegnamento della matematica dovrebbe avere come scopo anche quello di fornire al discente degli strumenti per la conoscenza del mondo esterno, sia pure a quel livello elementare che è dato dalla geometria, considerata come il primo capitolo della fisica, come pensava anche Newton. Ma ovviamente lo studio non può essere fatto utilmente senza la comunicazione, e la comunicazione richiede delle convenzioni di linguaggio e di rappresentazione. Pertanto, anche se le convenzioni di Peano fossero più ragionevoli e comode di quelle degli abituali metodi della geometria analitica, sarebbe sempre problematica la utilità del loro insegnamento, in vista del fatto che esse sono adottate da ben poche persone nel mondo. Pertanto dal punto di vista didattico l'insegnamento dei metodi di calcolo geometrico diretto avrebbe ben poca utilità. Va tuttavia osservato che esso potrebbe costituire un utile esercizio di interpretazione dei simboli, di "decodificazione" delle espressioni astratte e simboliche, qualora se ne facesse oggetto di studio in qualche classe sperimentale. Non pare dubbio infatti che alcuni teoremi possano essere dimostrati in modo molto elegante con queste convenzioni di scrittura, e che alcune relazioni geometriche possano essere rappresentate in modo particolarmente efficace. Per esempio riteniamo che le proprietà della geometria affine siano espresse in modo molto efficace e comodo con queste notazioni, per il modo stesso in cui sono definite le forme geometriche fondamentali. E ciò non appare affatto strano se si considerano gli stretti rapporti tra il calcolo geometrico di Peano ed il 'Calcolo baricentrico' di Möbius, oltre che con l'opera di Grassmann. La cosa è del resto confermata anche dalle numerose applicazioni che Peano fa del suo calcolo a problemi di statica.

Una considerazione a parte merita l'attenzione che Peano ha dedicato (come Grassmann del resto) alla operazione che egli chiama 'prodotto regressivo' e che gli permette di rappresentare le operazioni geometriche di intersezione nel piano e nello spazio. Si potrebbe dire che questa operazione, almeno nel piano, è destinata a surrogare l'operazione di soluzione dei sistemi di due equazioni lineari, che danno un punto (proprio o improprio). In questa luce pertanto le operazioni presentate da Peano risultano particolarmente comode ed efficaci, almeno fino a quando si tratta di intersezioni di rette nel piano e di enti lineari nello spazio. Invero quando si tratti invece di risolvere dei problemi che, rappresentati con le coordinate, richiedano soluzione di equazioni di grado superiore al primo, lo stesso A. è costretto a ricorrere a sistemi di coordinate, anche se mascherati in modo molto ingegnoso. È anche interessante osservare che quando Peano si curò di principi di geometria (per es. nei "Principi di geometria logicamente esposti") conservò delle notazioni analoghe, se pure non sempre con gli stessi significati, a quelle che egli adottò nel 'Calcolo geometrico'.

L'applicazione dei metodi di calcolo geometrico alla geometria proiettiva appare invece abbastanza difficile, perché dà luogo alla necessità di introdurre distinzioni di comportamento di linguaggi che invece tale dottrina evita con estrema facilità; ed invero si può spiegare questo fatto ricordando quanto abbiamo detto poco fa a proposito della geometria affine del piano e dello spazio. Invero appare chiaro che, nella misura in cui il Calcolo geometrico ci si presenta come uno strumento agile ed elegante per le proprietà affini, esso debba rivelare delle difficoltà e delle dissimmetrie per la espressione delle proprietà proiettive.

Analoghe considerazioni, e per ragioni quasi analoghe, valgono anche per le proprietà metriche, cioè per le proprietà studiate dalla geometria elementare. Per trattare queste proprietà Peano deve introdurre un operatore lineare che dà il rapporto di perpendicolarità; per esempio nel piano deve introdurre un operatore che fa girare una linea o un vettore di un angolo retto. Per mezzo di questo operatore egli poi definisce tutti gli enti della geometria elementare, comprese le funzioni goniometriche abituali. Ma il procedimento potrebbe essere considerato artificioso e comunque non batte le strade abitualmente battute dalla geometria elementare nelle trattazioni correnti. Si potrebbe obiettare che questa situazione è bene in carattere con l'Autore, che si distinse per la originalità delle sue idee e per la costanza con la quale avversò alcune posizioni tradizionali nella matematica, ma anche questa considerazione non aiuta a qualificare la sua trattazione per le necessità della didattica, almeno nell'ambiente scolastico di oggi. In particolare non si ritrovano in Peano i discorsi abbastanza involuti ed oscuri che Grassmann fa a proposito di quelle che egli chiama "grandezze estensive" e "grandezze intensive"; al posto di queste ultime Peano introduce un numero, da interpretarsi come "massa" per le forme di prima specie (punti) ed altri numeri, che hanno una interpretazione geometrica, per le forme di specie superiore.

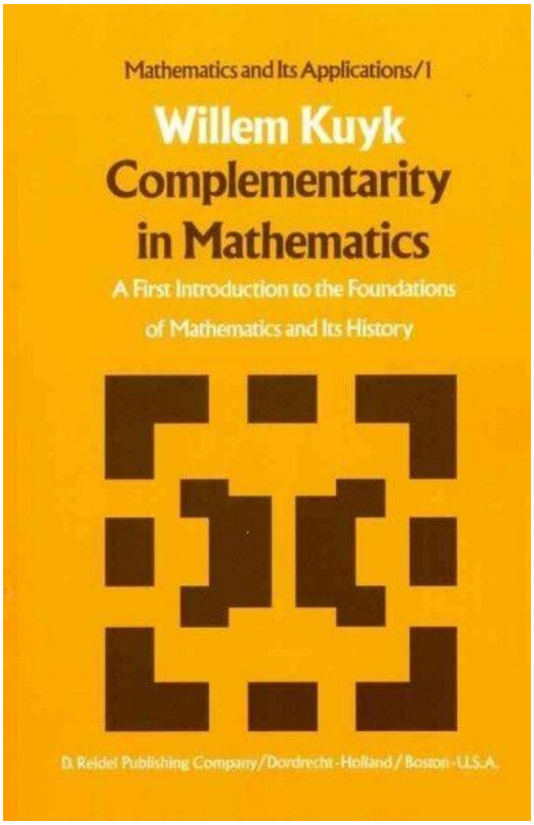
A nostro parere, la storia dei fondamenti della M. può essere considerata come un insieme di tentativi, tra loro correlati, di unificare una varietà di aspetti della attività della matematica classica. Tra questi aspetti sono inclusi i seguenti:

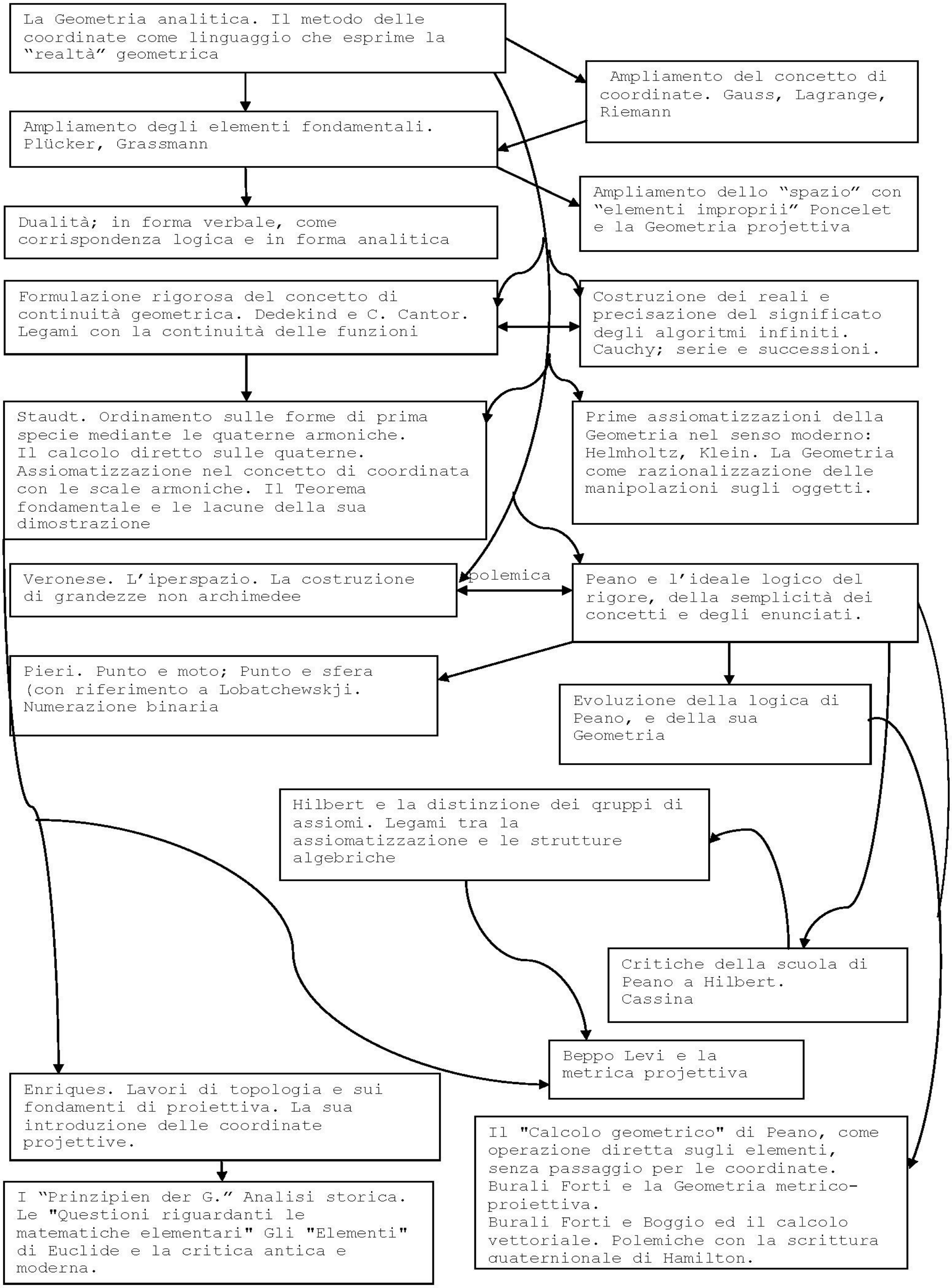
1) il ruolo della logica (a livello spontaneo o "naïf") intesa come una abilità spontanea ed innata nell'uomo di costruire i concetti delle cose, una varietà infinita di concetti, concetti di concetti, concetti di concetti di concetti e così via;
2) il ruolo del linguaggio, come strumento di comunicazione e di trasmissione di informazioni;
3) il ruolo della logica formale, come insieme di leggi (che si sviluppa nel tempo) che regolano il modo di pensare, con lo scopo specifico di organizzare ed ordinare, in modo coerente e deduttivo, i concetti che appartengono a determinati domini di pensiero (come la matematica, la fisica ecc .)
4) il ruolo del pensiero costruttivo (o creativo) nel senso che costruisce nuove entità da certe entità date, senza che si usi una terminologia che presuppone la esistenza di un mondo platonico di tutte le entità di un certo tipo;
5) il ruolo dell'intuizione, intesa come capacità di recepire immediatamente le evidenze che riguardano le cose, cioè come capacità di acquisire conoscenza senza processo deduttivo;
6) la valutazione della questione se in matematica esiste una 'conoscenza primaria' opposta alla

'conoscenza derivata o secondaria' (per esempio è 'primario' il concetto di numero oppure quello di 'insieme' come vuole il cantorismo? quale è la natura della nostra conoscenza a proposito dei numeri?)

7) La spiegazione del fatto che, fondandoci su metodi deduttivi, e con la applicazione di metodi puramente matematici spesso riusciamo a conseguire delle conoscenze (approssimate ma) vere a proposito del mondo; che cioè le proprietà fondamentali dei numeri, le nozioni di topologia e di analisi possono trovare applicazioni in campi fuori della matematica (per esempio è 'casuale' il fatto che i concetti della teoria dei gruppi trovino applicazione in fisica, oppure le strutture matematiche debbono essere considerate come una parte di strutture più vaste, che includono il pensiero riguardante le scienze della natura?)

Willem KUYK - Complementarity in Mathematics - A First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History - pagg. 130-131. Springer, 1977.




La Geometria analitica. Il metodo delle coordinate come linguaggio che esprime la “realtà” geometrica
Ampliamento del concetto di coordinate. Gauss, Lagrange, Riemann
Ampliamento degli elementi fondamentali. Plücker, Grassmann
Ampliamento dello “spazio” con “elementi improprii” Poncelet e la Geometria projettiva
Dualità; in forma verbale, come corrispondenza logica e in forma analitica
Formulazione rigorosa del concetto di continuità geometrica. Dedekind e C. Cantor. Legami con la continuità delle funzioni
Costruzione dei reali e precisazione del significato degli algoritmi infiniti. Cauchy; serie e successioni.
Staudt. Ordinamento sulle forme di prima specie mediante le quaterne armoniche. Il calcolo diretto sulle quaterne. Assiomatizzazione nel concetto di coordinata con le scale armoniche. Il Teorema fondamentale e le lacune della sua dimostrazione
Prime assiomatizzazioni della Geometria nel senso moderno: Helmholtz, Klein. La Geometria come razionalizzazione delle manipolazioni sugli oggetti.
Veronese. L’iperspazio. La costruzione di grandezze non archimedee
polemica
Peano e l’ideale logico del rigore, della semplicità dei concetti e degli enunciati.
Pieri. Punto e moto; Punto e sfera (con riferimento a Lobatchewskji. Numerazione binaria
Evoluzione della logica di Peano, e della sua Geometria
Hilbert e la distinzione dei gruppi di assiomi. Legami tra la assiomatizzazione e le strutture algebriche
Critiche della scuola di Peano a Hilbert. Cassina
Beppo Levi e la metrica projettiva
Enriques. Lavori di topologia e sui fondamenti di proiettiva. La sua introduzione delle coordinate projettive.
Il "Calcolo geometrico" di Peano, come operazione diretta sugli elementi, senza passaggio per le coordinate. Burali Forti e la Geometria metrico-proiettiva. Burali Forti e Boggio ed il calcolo vettoriale. Polemiche con la scrittura quaternionale di Hamilton.
I “Prinzipien der G.” Analisi storica. Le "Questioni riguardanti le matematiche elementari" Gli "Elementi" di Euclide e la critica antica e moderna.

Note

NdR: *Dattiloscritto senza data, reimpaginato dicembre 2014*.

(*)http://mathematica.sns.it/opere/19/

Si può vedere in Rete il Sito dell'Edizione Nazionale Mathematica Italiana del Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Scuola Normale Superiore.

Al link http://mathematica.sns.it/autori/1302/ (Onomasticon) si trova il contributo di Paolo Freguglia su Giuseppe Veronese. Di P. Freguglia si trova anche "I fondamenti della geometria secondo Giuseppe Veronese" (http://mathematica.sns.it/opere/141/) http://mathematica.sns.it/media/volumi/141/Paolo%20Freguglia%20I%20fondamenti%20della%20geometria%20secondo%20Giuseppe%20Veronese_bw.pdf

---

Molti sono i riferimenti a Peano nei contributi di CFM disponibili nel Sito. Si possono trovare con la funzione CERCA. In particolare ricordiamo:

Peano. (Senza data. Si tratta presumibilmente del testo di una conferenza tenuta da C.F. Manara alla fine degli anni '70, certamente posteriore al 1977).

Giuseppe Peano ed i fondamenti della Geometria. In: Atti del Convegno: Peano ed i Fondamenti della Matematica, Modena, 22-24 ottobre 1991. Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena. Riprodotto in IMSI, 17B, 3 (giugno 1994), pp. 283-295.

È disponibile in Archivio il testo

Paolo Freguglia – Dalle equipollenze ai sistemi lineari – Il contributo italiano al calcolo geometrico

1992- Edizioni QuattroVenti, Urbino

Alleghiamo un breve file di esercizi (presumibilmente degli anni 2000 ?).

Esercizi sul "*Calcolo geometrico*" di G. Peano, nel piano.

AVVERTENZA

Dato il tripunto ABC, la sua area (con segno) sarà indicata con $[ABC]$, avendosi ovviamente:

(1) $[ABC] = [BCA] = [CAB] = -[BAC] = -[ACB] = -[CBA]$.

Il *prodotto regressivo* di due bipunti AB e PQ è il punto X, intersezione delle due rette determinate dai bipunti. Il punto X intersezione è dato da:

(2) $X = A \cdot [BPQ] - B \cdot [APQ] = P \cdot [QAB] - Q \cdot [PAB]$.

(Osservazione). Si verifica che si ha:

(3) $[ABX] = [PQX] = 0$.

Teorema di Menelao.

Si abbia nel piano un triangolo di vertici A, B, C, e sia data una retta r, non passante per alcun vertice, e determinata come congiungente di due punti distinti, U, V. Siano C', A', B' i punti di intersezione tra la *r* ed i lati AB, BC, CA rispettivamente. Il classico *Teorema di Menelao* afferma che $AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB'$.
Ovvero, in termini di rapporto semplice di tre punti, si ha che $(ABC')\ (BCA')\ (CAB') = 1$.
Ora, si ottiene per la (2):

(4) $C' = A \cdot [UVB] - B \cdot [UVA]$,
$A' = B \cdot [UVC] - C \cdot [UVB]$,
$B' = C \cdot [UVA] - A \cdot [UVC]$.

Dalle (4), ricordando che $AA = 0$ e le altre proprietà, si trae:

(5) $AC' = -AB \cdot [UVA]$; $BC' = BA \cdot [UVB]$; $(ABC') = [UVA]/[UVB]$
$BA' = -BC \cdot [UVB]$; $CA' = CB \cdot [UVC]$; $(BCA') = [UVB]/[UVC]$
$CB' = -CA \cdot [UVC]$; $AB' = AC \cdot [UVA]$; $(CAB') = [UVC]/[UVA]$.

Da cui immediatamente si ottiene il teorema di Menelao.

Teorema di Ceva (1678).

Sia dato nel piano del triangolo ABC un punto O, non giacente su alcun lato del triangolo stesso. Siano A', B', C' le intersezioni dei lati del triangolo con le rette AO, BO, CO rispettivamente. Il (classico) teorema di Ceva afferma che $(AC'/C'B)\ (BA'/A'C)(CB'/B'A) = 1$, ovvero, in termini di rapporti semplici di tre punti, $(ABC')(BCA')(CAB') = -1$.

Ora, si ha ancora per le (2):

(6) $$A' = C \cdot [AOB] - B \cdot [AOC]$$
$$B' = A \cdot [BOC] - C \cdot [BOA]$$
$$C' = B \cdot [COA] - A \cdot [COB].$$

Quindi:

(7) $BA' = BC \cdot [AOB]$; $CA' = -CB \cdot [AOC]$; $CB' = CA \cdot [BOC]$; $AB' = -AC \cdot [BOA]$; $AC' = AB \cdot [COA]$;
$BC' = -BA \cdot [COB]$;
$(BCA') = [AOB]/[AOC]$; $(CAB') = [BOC]/[BOA]$; $(ABC') = [COA]/[COB]$.

E infine, ricordando le (1), si ottiene appunto il teorema di Ceva, ovvero:

(8) $$(ABC')(BCA')(CAB') = -1.$$

OSSERVAZIONE. Le procedure simboliche di Peano si prestano a trattare elegantemente la geometria affine. Ma diventano complicate quando si tratta di introdurre qualche nozione metrica. È possibile tuttavia costruire un invariante metrico-proiettivo come il *birapporto* di quattro elementi di una forma geometrica di prima specie senza far ricorso al calcolo geometrico di Peano, e solo ricorrendo alle notazioni tradizionali. Ricordando la definizione di *rapporto semplice* di tre punti di una retta:

(9) $(ABC) = AC/BC$, e posto $(ABC) = k$, si ha:

(10) $(BAC) = \frac{1}{k}$; $(ACB) = 1 - k$; $(BCA) = \frac{k-1}{k}$; $(CBA) = \frac{k}{k-1}$; $(CAB) = \frac{1}{1-k}$.

Siano ora date nel piano due rette, r ed r', e sia O il loro punto comune; sia poi V un punto del piano non giacente su alcuna delle rette e siano a, b, c tre rette per V, che intersecano r *ed* r' in tre punti A, B, C, A', B', C' rispettivamente. Dal Teorema di Menelao applicato al triangolo OAA', rispetto alla trasversale $< V\ B\ B' >$, si ha: $(AA'V)\ (A'OB')\ (OAB) = 1$, ossia:

(12) $$(A'AV) = (A'OB')\ (OAB).$$

Con procedura analoga, applicata allo stesso triangolo OAA', rispetto alla trasversale $< VCC' >$ si ottiene (semplicemente sostituendo nella (12) C e C' al posto di B e B'):

(13) $(A'AV) = (A'OC')\ (OAC)$, da cui

(14) $(OAB)\ (A'OB') = (OAC)\ (A'OC')$, da cui applicando le (10):

(15) $$(OAB)/(OAC) = (OA'B')/(OA'C').$$

Infine esplicitando i simboli dei rapporti semplici attraverso il simbolo di *birapporto*:

(16) $$(OABC) = (OA'B'C').$$

La relazione precedente viene tradizionalmente presentata con parole prendendo in considerazione la corrispondenza che lega i punti come A ed A', B e B', C e C' allineati a coppie con V; tale corrispondenza viene chiamata "*proiezione*", e di conseguenza la validità della relazione (16) viene presentata con l'enunciato: "*Se due quaterne di punti O, A, B, C; O, A', B', C', che appartengono a due rette r ed r' intersecantisi in O, vengono proiettate l'una sull'altra da un vertice V (che sta fuori di r e di r'), i loro birapporti hanno lo stesso valore*".
Conseguentemente si suole anche dire che "*il birapporto di due quaterne di punti che si trovano nelle condizioni sopra descritte è un "invariante" delle quaterne, rispetto alla operazione di proiezione"*.
Sia ora d una quarta retta per V, e siano D e D' le sue intersezioni con r ed r'. I due birapporti $(ODCB)$ e $(ODCA)$ sono pure invarianti per proiezione, e dalle formule che definiscono il birapporto si ottiene:

(17) $$(ODCB)/(ODCA) = (ODAB).$$

Dalle proprietà del birapporto si ha:

(18) $$(ODAB) = (ABOD),$$

birapporto che è pure invariante per proiezione. In modo analogo si dimostra che è invariante per proiezione il birapporto $(ABOC)$; si giunge quindi a concludere che anche il birapporto

(19) $$(ABCD) = (ABOD)/(ABOC)$$

è invariante per proiezione. Possiamo quindi enunciare il Teorema (detto "*di invarianza*").

Teorema. *Date quattro rette a, b, c, d di un medesimo fascio, e due rette r ed r', sono uguali tra loro i birapporti delle quaterne di punti che si ottengono secando le quattro rette con r ed r' rispettivamente*.

Convenzione. Se una retta secante è parallela ad una retta del fascio, ad esempio d, daremo al birapporto il valore del rapporto semplice (ABC). Ciò permette di enunciare la seguente

Definizione. Date in un piano quattro rette, a, b, c, d appartenenti ad un medesimo fascio, chiameremo "*birapporto delle quattro rette*", ed indicheremo col simbolo

(20) $$(a\ b\ c\ d)$$

il birapporto dei quattro punti che si ottengono intersecando le rette con una qualunque retta r del piano, non passante per il centro del fascio.
Osservazione. Se le rette del fascio sono tutte parallele tra loro, la dimostrazione del teorema di invarianza si ottiene con considerazioni elementari.

PROPRIETÀ DEL BIRAPPORTO DI QUATTRO PUNTI SU UNA RETTA.

Dalla definizione
(21) $$(ABCD) = (ABC)/(ABD),$$
si ottengono le uguaglianze

(22) $(ABCD) = AC \cdot BD/AD \cdot BC = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$. Posto poi $(ABCD) = k$, si ha:

(23) $(ABDC) = 1/k \quad ; \quad (ACBD) = 1 - k$.

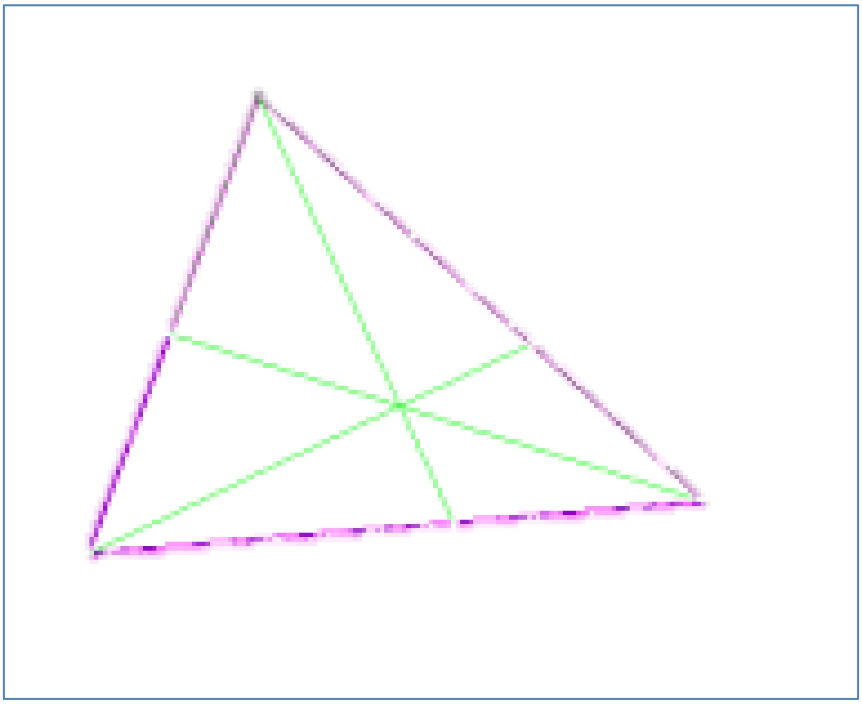
La prima relazione ha verifica immediata. Per quanto riguarda la seconda si ha:

(24) $(ACBD) = AB \cdot CD/AD \cdot CB$; si ha poi

(25) $AB \cdot CD = (AD + DB) \cdot (CB + BD) = AD \cdot CB + AD \cdot BD + DB \cdot CB + DB \cdot BD = AD \cdot CB + BD \cdot (AD + BC + DB) = AD \cdot CB + BD \cdot AC$.

Questo risultato, diviso per $AD \cdot CB$ e confrontato con la (21), dà la (23).
Dalle (21) e (23) si trae che il birapporto di quattro punti su di una retta può avere i seguenti 6 valori, dipendentemente dall'ordine in cui i punti stessi sono enunciati nel simbolo:

(26) $k, \; 1/k, \; 1 - k, \; (k-1)/k, \; 1/(1-k), \; k/(k-1)$.



ABC C'A'B'

TEOREMA DI CEVA (*seconda dimostrazione*).

Siano nel piano quattro punti indipendenti: A, B, C, O. Siano A' l'intersezione del lato BC del triangolo ABC con la retta $< AO >$, B' e C' le intersezioni dei lati CA e AB con le rette $< BO >$ e $< CO >$ rispettivamente. Il Teorema di Ceva afferma che $(ACB')\,(CBA')\,(BAC') = -1$.

Applicando il teorema di Menelao al triangolo ABA' rispetto alla trasversale $< CC' >$ si ha:

(27) $(BA'C)\ (A'AO)\ (ABC') = 1.$

Analogamente applicando il teorema di Menelao al triangolo $AA'C$ rispetto alla trasversale $< BO >$ si ottiene:

(28) $(AA'O)\ (A'CB)\ (CAB') = 1.$

Ricordando che $(A'AO) = 1/(AA'O)$, dalle (27) e (28) si ottiene

(29) $1/((A'CB)(\,CAB')) = (ABC')(BA'C),$

e di qui, esplicitando le espressioni e facendo le riduzioni:

(30) $(AB' \cdot BC' \cdot A'C)/(A'B \cdot CB' \cdot AC') = -1\,,$

da cui il Teorema di Ceva nella forma $(ACB')\ (CBA')\ (BAC') = -1$, e anche

(31) $(ABC')\ (BCA')\ (CAB') = -1.$

OSSERVAZIONE. La condizione (31) è necessaria perché le tre rette $< AA' >, < BB' >, < CC' >$ (dette *rette ceviane*) passino per O; si dimostra facilmente (per assurdo) che essa è anche sufficiente.

NdR File degli anni 2000(?), reimpaginato febbraio 2013.